Μαθημα 11ο 16/11/2017

Διαφ. Εξισωσεις

• Αν $f_1, \dots, f_n$ είναι συναρτησεις που εχουν παραγωγους $n-1$ ταξης σε ενα διαστημα I καλουμε οριζουσα Wronski των $y_1, \dots, y_n$ την

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = W(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I$$

είναι μια συναρτηση

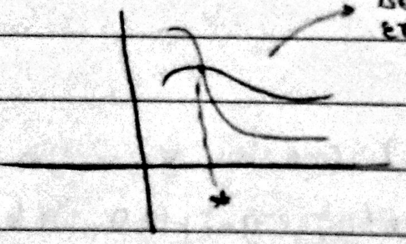
παραδειγμα

Η οριζουσα Wronski των x, e^x, $x \in \mathbb{R}$ είναι η $W(x, e^x)$

$$W(x, e^x)(t) = \begin{vmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix} = te^t - e^t = e^t(t-1)$$

• $a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ οι λυσεις έχουν σταθερο προσημο

ή είναι παντού μηδεν ή δε τεμνονται, οι λυσεις δεν τεμνονται



Δε γινεται αυτο γιατι αντιφασκει ετσι το μονοσημαντο

$y_1(t^*) = y_2(t^*)$

• (E_0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_i \in C(I)$, $a_n(t) \neq 0$, $t \in I$

ο χωρος των λυσεων είναι ενας διανυσματικος χωρος με n λυσεις

Προταση (θεωρημα 3)

Αν $y_1, \dots, y_n$ λυσεις της (E_0) στο I, τοτε για οποιεσδηποτε σταθερες $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ η συναρτηση $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$, $t \in I$ είναι λυση της (E_0) στο I

Αποδειξη

Επειδη $y_i \; (i=1,\dots,n)$ ειναι λυσεις της (E) ωστε $y_i \in C^{(n)}(I)$ και συνεπως

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \in C^{(n)}(I)$$

και

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = a_n \Big(\sum_{1}^{n} c_i y_i^{(n)}(t) \Big) + \dots + a_1 \sum_{1} c_i y_i'(t) + a_0 \sum_{1}^{n} c_i y_i(t) =$$

$$= (a_n y_1^{(n)} + \dots + a_1 y_1' + a_0 y_1) + \dots + (a_n y_n^{(n)} + \dots + a_1 y_n' + a_0 y_n) = 0$$

παρατηρηση συναρτηση

Ο τελεστης $a : C^n(I) \to C(I)$ με

$$a(\phi) = a_n \phi^{(n)} + \dots + a_1 \phi' + a_0 \phi, \quad t \in I$$

ειναι γραμμικος

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Δηλ. } \forall\, \kappa, \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi_1, \varphi_2 \in C^{(n)}(I) \text{ είναι} \\ a(\kappa \phi_1 + \lambda \phi_2)(t) = \kappa\, a\phi_1(t) + \lambda\, a\phi_2(t), \ t \in I \end{array} \right\}$$

οι γραμμικοι συνδυασμοι λυσεων είναι λυση

Προταση (θεωρημα 4)

Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λυσεις της (E_0). Τοτε οι $y_1, \dots, y_n$ ειναι γρ. ανεξαρτητες αν και μονο αν $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

αποδειξη

$(\Rightarrow)$ Υποθετω οτι οι συναρτησεις $y_1, \dots, y_n$ στο I ειναι λυσεις της (E_0) που ειναι γραμμ. ανεξαρτητες συναρτησεις. Θα αποδειξω οτι $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0, \ t \in I$

Εστω οτι $\exists\, t_0 \in I$ τ.ω $W(t_0) = 0$

Θεωρω το $n \times n$ γραμμ. ομογ. συστημα $(c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$\begin{array}{l} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{array} \qquad (S)$$

Η ορίζουσα του S είναι n

$$W(y_1,\dots,y_n)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

και συνεπώς το (S) έχει και μη τετριμμένη λύση δηλαδή
$\exists c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ με $|c_1|+\dots+|c_n| \neq 0$ και τ.ω

$c_1 y_1(t_0)+\dots+c_n y_n(t_0)=0$

τότε η συνάρτηση

$y(t)=c_1 y_1(t)+\dots+c_n y_n(t)$, $t\in I$

Η συνάρτηση y είναι η λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί τις συνθήκες

$y(t_0)=0$, $y'(t_0)=0$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)=0$

$\Rightarrow y(t)=0$ $\forall t\in I$ δηλ. $\exists c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ με $|c_1|+\dots+|c_n|\neq 0$

και με $c_1 y_1(t)+\dots+c_n y_n(t)=0$ $\forall t\in I$

άρα $\{y_1,\dots,y_n\}$ γραμμ. εξαρτ. άρα άτοπο

($\Leftarrow$) Ας είναι $y_1,\dots,y_n$ λύσεις της (E_0) στο I για τις οποίες έχουμε $W(y_1,\dots,y_n)(t)\neq 0$ $\forall t\in I$. Θα αποδείξω ότι οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γρ. ανεξάρτητες

Ας είναι $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ τ.ω $c_1 y_1(t)+\dots+c_n y_n(t)=0$ (1), $t\in I$

Επειδή $y_1,\dots,y_n \in C^{n-1}(I)$ θα έχουμε $c_1 y_1'(t)+\dots+c_n y_n'(t)=0$ (2)

⋮

$c_1 y_1^{(n-1)}(t)+\dots+c_n y_n^{(n-1)}(t)=0$ (n)

Παρατηρώ ότι το σύστημα (1)-(n) είναι $n\times n$ γραμμ. ομογ. σύστημα $c_1,\dots,c_n$ με ορίζουσα Wronski $W(y_1,\dots,y_n)(t)\neq 0$

Επομένως το σύστημα (1)-(n) έχει μόνο τη μηδενική λύση

δηλ. $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ $\Rightarrow y_1,\dots,y_n$ γρ. ανεξ.

Προταση

$y_1, \dots, y_n$ γραμ. ανεξ. λυσεις $\Leftrightarrow$ $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Προταση (Liouville) (Θεωρημα 5)

Αν $y_1, \dots, y_n$ λυσεις της (E_0) και $t_0 \in I$ τοτε

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}, \quad t \in I$$

διασπαση οριζοντος σε πινακες (θυμαμαι?)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & \dots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & & b_n \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Προταση

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ λυσεις} \Leftrightarrow W(y_1, \dots, y_n)(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds}$$

Παραδειγμα

$y_1 = e^x$, $y_2(x) = e^x(x-1)$, $y_3(x) = 2e^x - 2e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

αφου διαπιστωθει οτι ειναι λυσεις της $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

Υπολογιζω $W(t_0)$ με το αυθαιρετο μπορω $t_0 = 0$

και μετα υπολογιζω το $e^{-\int_0^t -\frac{4}{1} ds}$

Άσκηση

Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των λύσεων της εξίσωσης

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

δεδομένου ότι είναι της μορφής $e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$

Θέλω να βρω το λ ώστε η $e^{\lambda t}$ να ικανοποιεί την εξίσωση

για $y = e^{\lambda t}$ έχουμε

$$\lambda^3 e^{\lambda t} - 6\lambda^2 e^{\lambda t} + 5\lambda e^{\lambda t} + 12 e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda + 12) = 0$$

το $\lambda = -1$ ρίζα

1	-6	5	12	-1
////	-1	7	-12	
1	-7	12	0	

άρα $(\lambda+1)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$

$3 \quad 4$ ρίζες

Άρα

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} & 4e^{4t} \\ e^{-t} & 9e^{3t} & 16e^{4t} \end{vmatrix} = W(0)\, e^{-\int_0^t \frac{-6}{1} ds} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Πιο απλά αν την υπολογίσω στο 0

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \dots \neq 0$$

Ορισμος

Ένα συνολο n γραμ. ανεξ. λυσεων της (E_0) καλειται

βασικο συνολο λυσεων της (E_0)

Προταση

Υπαρχουν βασικα συνολα λυσεων της (E_0)

Ας ειναι $t_0 \in I$

Θεωρω τα ΠΑΤ που αποτελουν απο την (E) και τις n αρχικες συνθηκες

(c_1) $y(t_0)=1$, $y'(t_0)=0$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)=0 \to y_1$

(c_2) $y(t_0)=0$, $y'(t_0)=1$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)=0 \to y_2$

⋮

(c_n) $y(t_0)=0$, ..., $y^{(n-2)}(t_0)=0$, $y^{(n-1)}(t_0)=1$

για τις λυσεις $y_1, y_2, \dots, y_n$ εχουμε

$$W(y_1, \dots, y_n)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_1'(t_0) & \cdots & y_1^{(n-1)}(t_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_n(t_0) & y_n'(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$